

# 17. Savetovanje SDHI i SDH - Vršac, Srbija 2015. Conference SDHI and SDH - Vršac, Serbia

## MODELIRANJE NEUSTALJENOG STRUJANJA U POROZNOJ SREDINI METODOM KONAČNIH ELEMENATA

Damjan Ivetić<sup>1</sup>  
Nenad Jaćimović<sup>2</sup>  
Dušan Prodanović<sup>3</sup>

**APSTRAKT:** Podzemne vode predstavljaju jedan od ključnih resursa za vodosnabdevanje. Matematičko modeliranje dinamike podzemnih voda je neophodno u cilju sprovođenja analiza kao što su bilansiranje raspoloživih količina ili transport zagađujućih materija. Neustaljeno strujanje vode u poroznoj sredini se matematički opisuje paraboličkom, parcijalnom, diferencijalnom jednačinom drugog reda. Budući da se do analitičkog rešenja u opštem slučaju dosta teško dolazi, neophodno je pomoću neke numeričke metode doći do aproksimativnog rešenja. U ovom radu je predstavljeno postupak dobijanja numeričkog rešenja jednačine u dve dimenzije, metodom konačnih elemenata. Prednosti primene metode konačnih elemenata u numeričkom rešavanju diferencijalnih j-na su brojne, među kojima se ističu mogućnosti aproksimacije nepravilnih domena kao i diskretizacija domena mrežom promenljive gustine. Prikazan je način primene modela u sinergiji sa softverom AutoMesh 2D na primeru iz literature.

**Ključne reči:** Podzemne vode, Neustaljeno strujanje, Metoda konačnih elemenata

## FINITE ELEMENT MODELLING OF TRANSIENT FLOW IN POROUS MEDIA

**ABSTRAKT:** Groundwater is one of the key resources used for the water distribution. Mathematical modelling of the groundwater dynamics is a necessity when analysis such as available water balancing or contaminant transport are performed. Transient water flow in porous media is mathematically described with a parabolic partial differential equation of second order. It is usually difficult to obtain an analytical solution, so some numerical method needs to be employed in order to obtain an approximate solution. In this paper, a procedure is presented for the derivation of the numerical solution of the 2D equation by employment of the finite element method. There are numerous advantages of the finite element method solutions of differential equations, amongst which stands out the possibility of the irregular domain approximation and variable density mesh discretization. Employment of the model in synergy with the AutoMesh2D software is presented on the literature example.

**Keywords:** Groundwater, Transient flow, Finite element method

---

<sup>1</sup> Mast. inž., Damjan, Ivetić, asistent, Univerzitet u Beogradu/Građevinski fakultet, Bul. kralja Aleksandra 73, divetic@hikom.grf.bg.ac.rs

<sup>2</sup> Dr, Nenad, Jaćimović, docent, Univerzitet u Beogradu/Građevinski fakultet, Bul. kralja Aleksandra 73

<sup>3</sup> Dr, Dušan, Prodanović, redovni profesor, Univerzitet u Beogradu/Građevinski fakultet, Bul. kralja Aleksandra 73

## 1 Uvod

Izučavanje kretanja i stanja vode koja se nalazi u poroznoj sredini zemljine kore, predstavlja važan deo delatnosti inženjera hidrotehnike širom sveta. Od ukupne količine slatke vode koja se nalazi na planeti Zemlji, čak preko 90%, čini voda koja se u različitim oblicima, kreće ili miruje u zemljištu. Sva voda koja se nalazi u ovom poroznom medijumu se klasifikuju kao podzemna. U mnogim državama podzemna skladišta vode (akviferi) predstavljaju glavna izvorišta za vodosnabdevanje. Pored ove, postoje i brojne sekundarne uloge podzemne vode (poljoprivredna, industrijska itd.) zbog kojih su kroz čovekovu istoriju one dobijale pažnju brojnih istraživača. Trenutno stanje podzemnih voda u svetu ukazuje na neodrživ način upravljanja ovim vrednim resursom. Antropogena eksploatacija podzemnih voda prevazilazi mogućnosti prirode da nadomesti preuzete količine.

Uspešno upravljanje postojećim količinama podzemnih voda je trajan, multidisciplinarni i složeni proces koji obuhvata širok spektar delatnosti i uključuje različite profesije. Jedan od osnovnih segmenata ovog procesa je i modeliranje kretanja podzemnih voda u poroznim medijumima u prirodi. Brojne analize se zasnivaju upravo na rezultatima različitih modela koji se koriste u ove svrhe. Praktično je nemoguće uraditi bilo kakve ozbiljnije predikcije npr bilansiranja voda u podzemnim akviferima ili transporta zagađujućih materija bez „kvalitetnog“ modela strujanja fluida u poroznoj sredini. Kretanja fluidnih delića u poroznoj sredini matematički se opisuje parcijalnim diferencijalnim jednačinama drugog reda. Pošto se izuzev u retkim slučajevima, ove jednačine ne mogu analitički rešiti, neophodno je doći do aproksimativnog rešenja primenom neke numeričke metode. U ovom radu je predstavljeno rešenje parabolike parcijalne diferencijalne jednačine kojom se opisuje neustaljeno kretanje podzemne vode, primenom metode konačnih elemenata (MKE). Metoda konačnih elemenata, zbog brojnih prednosti koje poseduje, je verovatno najčešće korišćena numerička metoda za rešavanje diferencijalnih jednačina iz različitih sfera fizike [1][10][11]. Jednačine koje se rešavaju se dobijaju primenom Galjorkinog principa težinskih reziduala.

U okviru istraživanja koja su prethodila ovom radu razvijen je numerički model koji je integrisan u program kodiran u okviru FORTRAN programskog okruženja. Kao rezultat istraživanja, dobijen je program *unsteady\_seepg* koji se u kooperaciji sa slobodnim softverom razvijenim u Kini, AutoMesh2D, može koristiti sa analiziranjem neustaljenog 2D strujanja u poroznoj sredini. U radu je predstavljen postupak razvoja numeričkog modela za rešavanje jednačine kojom se opisuje neustaljeno strujanje vode u poroznoj sredini, sa primenom razvijenog modela na primerima iz literature.

## 2 Metodologija

U okviru ovog poglavlja su opisani najvažniji aspekti primene i razvijanja numeričkog modela za simuliranje neustaljenog strujanja u poroznoj sredini. Budući da je tema rada relativno kompleksna, pojedini delovi su ili ukratko opisani ili su u potpunosti izostavljeni. Svi ovi segmenti metodologije razvijanja numeričkog modela se mogu naći u navedenoj literaturi.

## 2.1 Matematički model

Osnovna jednačina neustaljenog strujanja u poroznoj sredini se dobija iz zakona održanja mase, koji se kombinuje sa Darsiјevim zakonom (ovde se ne navodi izvođenje koje se može naći u literaturi [5][9]). Za slučaj 2D analize, sređivanjem se dobija sledeći oblik parabolіčke parcijalne diferencijalne jednačine:

$$S_s \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( K_x \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( K_y \frac{\partial h}{\partial y} \right) + W \quad (1)$$

Sa  $S_s$  obeležena je specifična izdašnost koja je ustvari jednaka  $(\alpha + n\beta)$ , gde je  $\alpha$  koeficijent stišljivosti tla,  $n$  poroznost tla a  $\beta$  koeficijent stišljivosti vode. Specifična izdašnost praktіčno predstavlja količinu vode koja se iscedi iz ili prihvati u jediničnu zapreminu akvifera usled jedinične promene nivoa podzemne vode i to kao posledica stišljivosti vode i skeleta podzemne sredine. Sa oznakom  $h$  je predstavljena pijezometarska kota fluida, dok  $K_x$  i  $K_y$  predstavljaju koeficijente filtracije u dva pravca  $x$  i  $y$ . Oznakom  $W$  je obeležen član koji predstavlja izvor odnosno ponor.

Uputno je napomenuti da se u slučaju strujanja sa slobodnom površinom (*phreatic aquifer*) za razliku od strujanja pod pritiskom (*confined aquifer*) specifična izdašnost  $S_s$  svodi samo na koeficijent poroznosti  $n$ , budući da je izdašnost povezana sa stišljivošću tla zanemarljiva u odnosu na izdašnost koja je povezana sa pomeranjem nivoa podzemne vode.

## 2.2 Metoda konačnih elemenata

MKE je numerіčka metoda koja zajedno sa metodom konačnih razlika spada u grupu metoda *diskretne analize*. Zasniva se na fizičkoj diskretizaciji razmatranog domena u kojem se posmatra određeni fenomen. Osnovu za sva razmatranja predstavlja jedan deo celokupnog domena konačnih dimenzija, koji se naziva poddomen ili *konačni element*. U okviru svakog konačnog elementa se tačno rešenje diferencijalnih jednačina aproksimira linearnom kombinacijom probnih (trial) funkcija koje su najčešće polinomi. Ove probne funkcije su linearno nezavisne f-je koje zadovoljavaju granične uslove razmatranog problema. Nepoznati koeficijenti probnih funkcija se mogu odrediti nekom od metoda: Kolokaciona, Rajli-Ric ili Galjorkinova metoda ponderisanih reziduala. Rešanja koja važe za jedan konačni element se zatim grupišu kako bi se dobilo globalno rešenje odnosno rešenje za ceo domen. Ovo znači da se razmatrani domen kao kontinuum, zamenjuje diskretnim modelom međusobno povezanih poddomena odnosno konačnih elemenata. Skup konačnih elemenata kojima je aproksimiran ceo domen se naziva *mreža konačnih elemenata*. Pretpostavlja se da su konačni elementi međusobno povezani u konačnom broju tačaka koje se usvajaju na konturama elemenata i u kojima se određuje rešenje. Ove tačke se nazivaju čvorovi ili čvorne tačke. Najbitnije prednosti aproksimacije domena konačnim brojem elemenata u odnosu na druge metode su:

- Precizna aproksimacija kompleksne geometrije
- Analiziranje heterogenih domena, odnosno različitih materijala sa različitim karakteristikama

- Jednostavan prikaz rešenja za celokupan domen
- Analiziranje lokalnih efekata unutar velikog domena

U nastavku se daje prikaz primene Galjorkinove metode ponderisanih reziduala konkretno na j-ni (1.) zajedno sa ostalim bitnim segmentima, u cilju razvijanja adekvatnog numeričkog modela.

## 2.3 Galjorkinova metoda ponderisanih rezultata

Kada se koristi MKE u dinamici fluida, u kompjuterskim programima se skoro redovno kombinuje sa Galjorkinovom metodom tako da su praktično postali sinonimi [9]. Galjorkin je formulisao metodu po kojoj rešenja jednačina koja definišu neki fizički proces koji se ispituje za svaki čvor mogu da se kombinuju kako bi se dobila najmanja moguća greška (rezidual) za celokupno (za ceo domen) rešenje. Princip težinskih ili ponderisanih reziduala se primenjuje direktno na diferencijalne jednačine koje opisuju problem. Rezidual ili ostatak, u svakoj tački domena predstavlja meru za koliko rešenje jednačine ne zadovoljava samu jednačinu. Ako se uprosečeni ponderisani rezidual svede na nulu, tada su dobijena rešenja ustvari „tačna“ rešenja sistema jednačina. Slikovitiji opis sledi kroz primer primene konkretno na neustaljenu j-nu filtracije. Prvi korak u primeni Galjorkinove metode na neustaljenu j-nu filtracije je definisanje aproksimativnog ili probnog rešenja  $\bar{h}(x, y, t)$ . Navedeno rešenje je predstavljeno kao suma proizvoda, gde je svaki član proizvod  $h_L$  u čvoru  $L$  i odgovarajuće *interpolacione* ili *bazne funkcije*  $N_L(x, y)$  :

$$\bar{h}(x, y, t) = \sum_{L=1}^{N_p} h_L(t) N_L(x, y) \quad (2)$$

Gde  $N_p$  označava broj čvorova. Ovaj način predstavljenja aproksimativnog rešenja  $\bar{h}(x, y, t)$  je iskorišćen da bi se jasno razgraničile promenljive po vremenu i po prostoru. Aproksimativno rešenje je ustvari predstavljeno kao linearna kombinacija interpolacionih f-ja. Ove funkcije se nazivaju interpolacionim zato što definišu aproksimativno rešenje nad celim domenom problema preko vrednosti nepoznate (pijezometarske kote) u čvorima mreže konačnih elemenata. Njihov oblik zavisi od tipa elemenata (trougao, četvorougao itd.) koji se koriste za diskretizovanje mreže. Za MKE u ovom radu korišćeni su pravilni četvorougaoi (*quadrilateral*) elementi gde je svaki element definisan pomoću četiri čvora. Budući da su elementi definisani na ovaj način standardni u primeni, detaljnije o njihovoj definiciji kao i o obliku interpolacionih funkcija može se naći u literaturi [1][5][9].

Sledeći korak je opisivanje ukupno  $N_p$  uslova za definisanje  $N_p$  vrednosti pijeziometarskih kota. U metodi Galjorkina,  $N_p$  uslova se dobija tako što se zahteva da jednačina kojom se definiše problem (u ovom slučaju j-na neustaljene filtracije), kada se pomnoži odnosno ponderiše sa svakom od  $N_p$  interpolacionih funkcija, i integrali preko celog domena, bude jednaka nuli, odnosno:

$$\iint_D \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( K_x \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( K_y \frac{\partial \bar{h}}{\partial y} \right) + W - S_s \frac{\partial \bar{h}}{\partial t} \right) N_L(x, y) dx dy = 0 \quad (3)$$

gde  $L=1,2,...,N_p$ , a integracija nad  $D$  predstavlja integraciju nad celokupnim domenom.

U rezidualnoj formulaciji jednačine neustaljene filtracije (3) može se primetiti da se kod prva dva člana u zagradi javlja drugi izvod aproksimativnog rešenja  $\bar{h}(x, y, t)$ , samim tim i interpolacione funkcije  $N_L(x, y)$ . Upravo zbog ove činjenice, određivanje vrednosti integrala reziduala može biti komplikovan ili čak nerešiv zadatak. Naime interpolaciona funkcija iako je kontinualna nad domenom  $D$ , njen prvi izvod nije obavezno takav. Zbog toga je neophodno pribeći primeni parcijalne integracije.

Za parcijalnu integraciju primenjuje se Gaus-Grinova ili Gaus-Ostrogradski teorema, kojom će se smanjiti red izvoda za jedan u problematičnim članovima  $j$ -ne (3). Konkretno, kada se navedena teorema primeni na jednačinu neustaljene filtracije, i ako se pretpostavi da se koeficijent filtracije ne menja po domenu (kasnije poddomenu odnosno konačnom elementu) dobija se njen sledeći oblik:

$$\begin{aligned} \iint_D \left( K_x \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} \frac{\partial N_L}{\partial x} + K_y \frac{\partial \bar{h}}{\partial y} \frac{\partial N_L}{\partial y} \right) dx dy + \iint_D S_s \frac{\partial \bar{h}}{\partial t} N_L dx dy = \\ \iint_D W N_L dx dy + \int_{\Gamma} \left( K_x \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} n_x + K_y \frac{\partial \bar{h}}{\partial y} n_y \right) N_L d\sigma \end{aligned} \quad (4)$$

Gde je  $\Gamma$  granica domena  $D$ ,  $\sigma$  promenljiva koja predstavlja odstojanje duž granice u smeru suprotnom od kazaljke na satu, a  $n_x$  i  $n_y$  jedinični vektori normale na granicu  $\Gamma$ . Drugi član sa desne strane predstavlja fluks kroz granicu, i ako ne postoji granični uslov dat u vidu proticaja ovaj član je jednak nuli. Primećuje se da se sada ne pojavljuju više drugi izvodi promenljive  $h$ , već samo prvi izvodi čime je problem sa početka ovog poglavlja prevaziđen pa se može dalje pristupiti primeni metode konačnih elemenata u kombinaciji sa Galjorkinovom metodom.

## 2.5 Definisane sistema parcijalnih diferencijalnih jednačina

Pokazano je kako se od jednačine (3) dolazi do jednačine (4) primenom pravila parcijalne integracije. Konkretno,  $j$ -na (4) predstavlja uslov, odnosno osnovu primene Galjorkinove metode, napisan za  $L$ -tu interpolacionu odnosno baznu funkciju, a to je da je ponderisani rezidual jednak nuli. Za svaki  $L$ -ti čvor mreže konačnih elemenata, postoji po jedna ovakva jednačina, formirajući sistem od  $N_p$  parcijalnih diferencijalnih  $j$ -na. Definiše se pravilo za ispisivanje jednačina u matričnoj notaciji radi bolje preglednosti: matrice se predstavljaju velikim slovima unutar uglastih zagrada  $[X]$  a vektori, bilo kolone ili vrste, malim slovima unutar vitičastih zagrada  $\{x\}$ . Na ovaj način sistem od  $N_p$  parcijalnih diferencijalnih  $j$ -na se može predstaviti u matričnoj notaciji na sledeći način [2]:

$$[A]\{h\} + [B]\left\{\frac{\partial h}{\partial t}\right\} = \{f\} \quad (5)$$

Gore prikazani članovi se mogu porediti sa j-nom (4) kako bi se stekao uvid o njihovom značenju. Matrica  $[A]$  predstavlja matricu provodnosti (*conductance*). Naziv joj potiče od činjenice da su množiocci članove ove matrice ustvari koeficijenti vodopropusnosti ili kako se u engleskoj terminologiji obično koristi hidrualičke provodnosti (*hydraulic conductivity*). Matrica  $[A]$  je kvadratna matrica dimenzija  $N_p * N_p$ . Vektor kolona  $\{h\}$  je dužine  $N_p$  i sačinjavaju ga pijezometarske kote u čvorovima  $L$  u nekom trenutku  $t$ ,  $h_L(t)$ . Matrica  $[B]$  je kao i matrica  $[A]$  kvadratna matrica identičnih dimenzija, i naziva se matrica kapacitivnosti (*capacitance*). Unutar njenih članova se nalaze specifične izdašnosti materijala preko kojih je obračunat kapacitet zemljišta da primi ili drenira „usklađene“ količine vode. Ova matrica je karakteristična za neustaljene uslove strujanja u poroznoj sredini. Sledeća je vektor kolona  $\{\partial h / \partial t\}$  dužine  $N_p$  koja je sastavljena od izvoda po vremenu, pijezometarskih kota u čvoru  $L$ ,  $\partial h_L / \partial t$ . Konačno, tu je i vektor kolona  $\{f\}$  tzv vektor sila (*force*). On je sastavljen od izvornih članova kojima se opisuje izvor ili ponor, kao i od graničnih uslova datih u vidu fluksa. Kao što će se kasnije i ponoviti ukoliko ovakav granični uslov nije zadat ceo drugi integral sa desne strane jednačine (4) je jednak nuli.

Neophodno je definisati i postupak formiranja globalnog (celokupnog) sistema linearnih jednačina. Naime, filozofija kojom se ovaj postupak sprovodi je sledeća: integrali u jednačini (4) se određuju element po element, da bi se konačno oni sumirali nad celim domenom problema i na taj način dobile tzv globalne matrice sistema čijim rešavanjem dolazimo do nepoznatih pijezometarskih kota u čvorovima. Matematički se to može predstaviti na sledeći način:

$$\begin{aligned} & \sum_e \left\{ \iint_D \left( K_x \frac{\partial \bar{h}^e}{\partial x} \frac{\partial N_L}{\partial x} + K_y \frac{\partial \bar{h}^e}{\partial y} \frac{\partial N_L}{\partial y} \right) dx dy \right\} + \sum_e \left\{ \iint_D S_s \frac{\partial \bar{h}^e}{\partial t} N_L dx dy \right\} \\ & = \sum_e \left\{ \iint_D W N_L dx dy \right\} + \int_{\Gamma} \left( K_x \frac{\partial \bar{h}^e}{\partial x} n_x + K_y \frac{\partial \bar{h}^e}{\partial y} n_y \right) N_L d\sigma \end{aligned} \quad (6)$$

Gde je  $L = 1, 2, \dots, N_p$ . Primećuje se da je sada umesto aproksimativnog rešenja  $\bar{h}(x, y, t)$  u obrazcu sa leve strane  $\bar{h}^e(x, y, t)$  da bi se pokazalo da je ovo aproksimacija po elementu.

## 2.6 Diskretizacija matrične diferencijalne jednačine konačnim razlikama

Prikazana matrična diferencijalna jednačina prvog reda (j-na 4) se mora diskretizovati kako bi se definisao konačni oblik sistema linearnih jednačina. Uobičajena je praksa, aproksimirati izvod pijezometarske kote po vremenu u matričnoj notaciji, nekom od metoda konačnih razlika. Hofman [8] predlaže da se primeni aproksimacija koja će biti najmanje istog reda tačnosti kao i što je metoda konačnih elemenata, odnosno najmanje drugog reda, budući da je to približna tačnost aproksimacije konačnim elementima. Neki drugi istraživači, smatraju da je



aproksimacija prvog reda dovoljne tačnosti. Aproksimacija izvoda piježometarskih kota po vremenu u matričnoj notaciji u opštem slučaju ima sledeći oblik:

$$\left\{ \frac{\partial h}{\partial t} \right\} = \frac{1}{\Delta t} \left( \{h\}^{t+\Delta t} - \{h\}^t \right) \quad (7)$$

Indeksi iznad vektora piježometarskih kota predstavljaju vremenski korak za koji se odnose ove vrednosti, dok je  $\Delta t$  vrednost vremenskog koraka. Aproksimacija izvoda iz j-ne (7) po vremenu konačnim razlikama prvog reda se može sprovesti na dva načina. U zavisnosti od odabira vremenskog trenutka u intervalu  $t$  i  $t + \Delta t$ , na kom će se odrediti član  $[A]\{h\}$ , zavisice da li je jednačina eksplicitnog ili implicitnog oblika. Ukoliko se član  $[A]\{h\}$  određuje u prošlom vremenskom trenutku  $t$ , dobija se eksplicitna šema odnosno izvod je aproksimiran razlikama unapred. Ako je navedeni član aproksimiran u vremenskom trenutku  $t + \Delta t$ , onda je šema implicitna odnosno izvod je aproksimiran razlikama unazad. U tom slučaju dobija se sledeći oblik matrične jednačine:

$$\left( [A] + \frac{1}{\Delta t} [B] \right) \{h\}^{t+\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} [B] \{h\}^t + \{f\} \quad (8)$$

Važno je apostrofirati, da se bez obzira na način aproksimiranja izvoda po vremenu, matrice  $[A]$  i  $[B]$  formiraju samo jednom u toku proračuna i njihova vrednost se ne menja tokom celog proračuna, dok se j-na (8) rešava u svakom vremenskom koraku. Slično se može reći i za vektor sila  $\{f\}$ , samo ukoliko definisani granični uslovi u vidu fluksa zapremina ili izvorni/ponorni članovi ne menjaju svoj intenzitet u toku vremena.

## 2.7 Granični uslovi

Problematika strujanja vode u poroznoj sredini razlikuje dva tipična načina za zadavanje graničnih uticaja u zavisnosti od dispozicije modela odnosno od onoga što želimo da predstavimo u numeričkom modelu. Prvi slučaj je zadavanje graničnog uslova proticaja odnosno fluksa zapremina a drugi definisanje piježometarske kote u graničnom čvoru. Posebno se tretiraju obe varijante što je neophodno imati u vidu pri korišćenju metode konačnih elemenata. Opširnije o načinima zadavanja graničnih uslova se može pronaći u [5].

U prvom slučaju, ukoliko je  $i$  čvor na granici preko koje je definisan normalan odnosno upravan fluks, tada se granični integral iz j-ne (6.), može napisati koristeći Darsijev zakon preko definisanog fluksa:

$$f_{L_i} = \iint_D W N_{L_i} dx dy + \int_{\Gamma} \left( K_x \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} n_x + K_y \frac{\partial \bar{h}}{\partial y} n_y \right) N_{L_i} d\sigma \quad (9)$$

Konvencija o predznaku je takva da su proticaji  $q_1$  i  $q_2$  pozitivni ako predstavljaju doticaj u element a negativni ako obeležavaju oticaj iz elementa.

Sledeći slučaj je kada je u čvoru  $L$ , definisan granični uslov u vidu konstantne pijeziometarske kote  $h_L$ . Ako je  $h_L$  poznato, onda  $L$ -ta jednačina u sistemu mora biti redundantna ili suvišna. Vrednost graničnog integrala iz jednačine (6.) ne postoji ako samo izbacimo  $L$ -tu jednačinu iz sistema. U preostalim jednačinama sistema predstavljenog  $j$ -nom 13. javljaće se članovi koji poseduju poznatu pijeziometarsku kotu  $h_L$ . Na taj način prenosi se uticaj graničnog uslova u ostatak sistema jednačina.

## 2.8 Upotreba softvera AutoMesh 2D za generisanje mreže konačnih elemenata

Trenutno je na internetu dostupan značajan broj kako slobodnih tako i licenciranih softvera za generisanje mreže konačnih elemenata. Pored „standalone“ varijanti ovih softvera, brojni programski paketi sadrže integrisane funkcije koje mogu obaviti zadatak ili se takve funkcije mogu preuzeti sa zvaničnih foruma ili sajtova (npr MatLab). Autori su u ovoj analizi koristili Fortran programski jezik za razvijanje numeričkog modela, koji se odlikuje znatno većom brzinom izvršenja od npr MatLab-a kao i nažalost manje „user-friendly“ okruženjem. Zbog toga je neophodno koristiti eksterni generator mreže konačnih elemenata. Na internet stranici <http://www.automesh2d.com> dostupan je slobodni softver AutoMesh 2D koji je u potpunosti kompatibilan sa programom koji je razvijen u okviru istraživanja koja su pratila ovaj rad. Navedeni softver omogućava korišćenje kako trougaoanih tako i četvorougaoanih konačnih elemenata, kao i lako eksportovanje ključnih podataka o mreži (npr matrice povezanosti elemenata). Više o samom softveru i načinu njegove upotrebe se može pronaći u odgovarajućoj publikaciji [6].

## 3 Primer

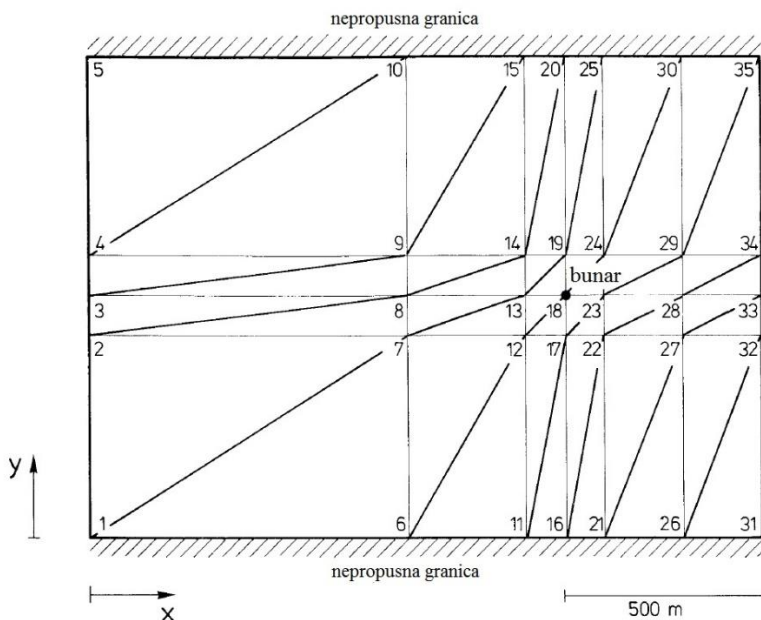
Primer korišćen za verifikaciju numeričkog modela parcijalne diferencijalne  $j$ -ne (1), predstavljenog u ovom radu je preuzet iz stručne literature [5]. Mreža konačnih elemenata predstavljena na izvornim slikama je relativno retka odnosno gruba, pa je odmah ispod predstavljena i mreža konačnih elemenata formirana u AutoMesh2D softveru korišćena od strane autora koja je znatno gušća. U okviru spomenute literature od rezultata su prikazane samo vrednosti pijeziometarskih kota u određenim vremenskim trenucima, dok su u ovom radu pored pijeziometarskih kota prikazani i vektori brzina strujanja u poroznoj sredini dobijeni kao proizvod koeficijenta vodopropusnosti i gradijenata pada pijeziometarskih kota.

### 3.2 Usamljeni bunar u horizontalnoj ravni

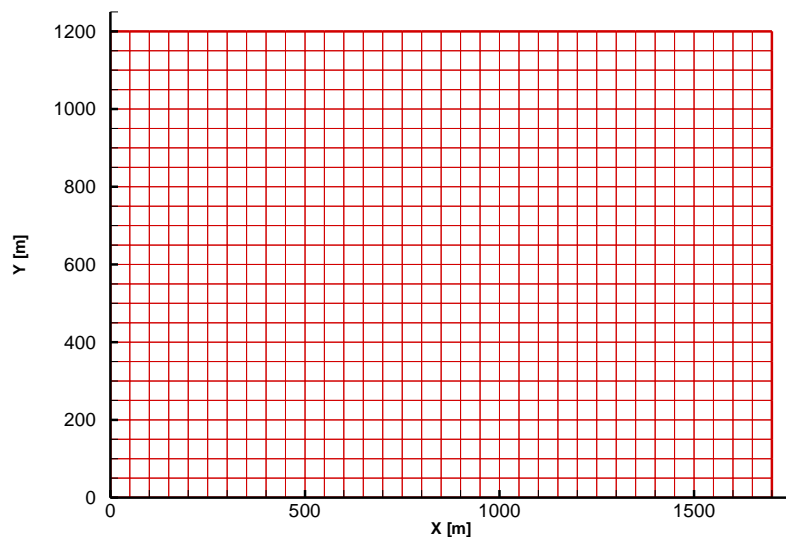
Drugi primer, predstavlja nešto složeniji slučaj, zbog postojanja crpnog bunara. Naime, radi se o slučaju usamljenog bunara u akviferu koji je sa južne i severne strane oivičen nepropusnom granicom, a sa istočne i zapadne strane rezervoarima u kojima je fiksirana pijeziometarska kota. Dispozicija problema, zajedno sa mrežom konačnih elemenata, korišćenoj u izvornoj literaturi je prikazana na Slici 1. u horizontalnoj ravni. Domen je diskretizovan uz pomoć 24 trougaona konačna elementa definisana pomoću 35 čvornih tačaka. Koeficijent transmisivnosti je jednak u oba pravca i iznosi  $T = 0.1 \text{ m}^2/\text{s}$ . Budući da je ovde debljina sloja nepoznata i ne utiče na



rezultate, koeficijent transmisivnosti se prosto koristi u svim prethodno spomenutim jednačinama umesto  $K$ . Specifična izdašnost je  $S_s = 0.001$ . Kapacitet crpnog bunara iznosi  $W = 0.5 \text{ m}^3/\text{s}$ . Preostali potrebni podaci su prikazani na slici 4. Na slici 5. je prikazana mreža konačnih elemenata korišćena za potrebe ovog rada koja se sastoji od 816 četvorouganih elemenata i 875 čvornih tačaka.



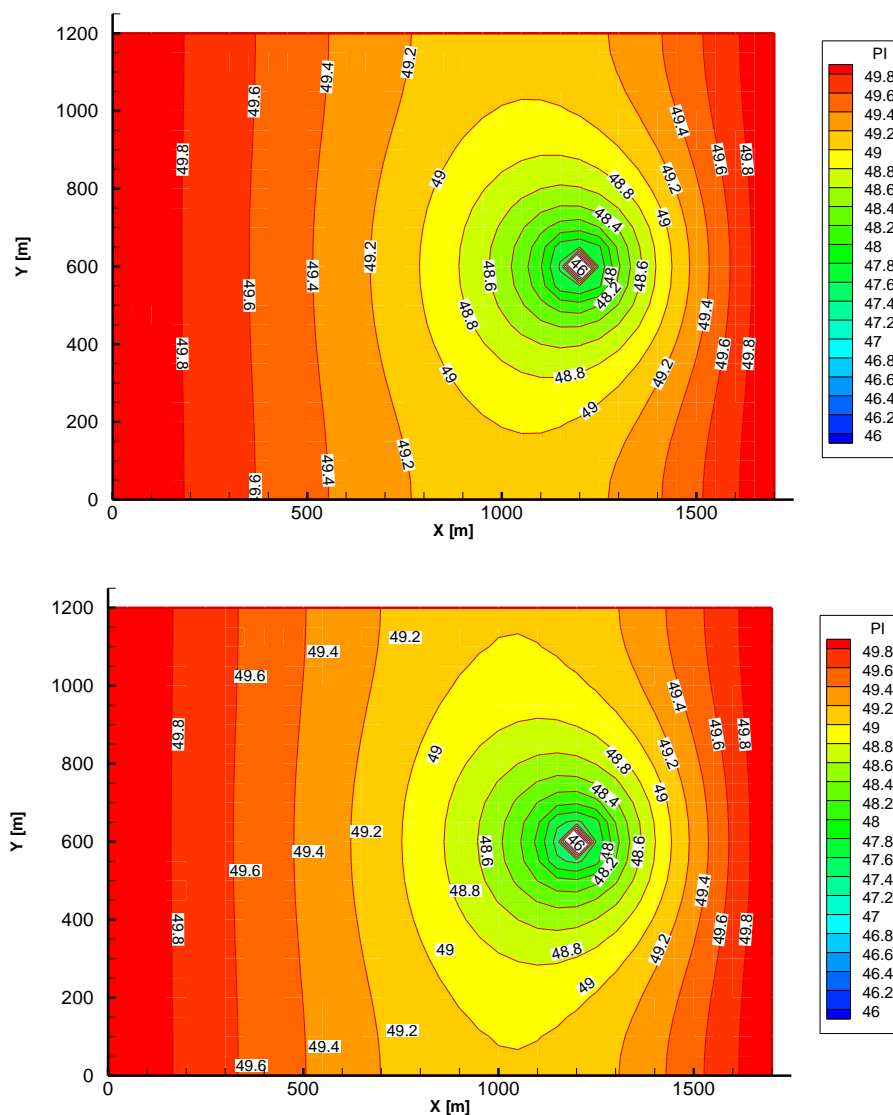
Slika 1. Dispozicija problema i mreža konačnih elemenata za primer B; preuzeto iz [5]  
Figure 1. Problem disposition and the finite element mesh for the example B; taken from [5]



Slika 2. Mreža konačnih elemenata za primer B dobijena primenom AutoMesh 2D  
Figure 2. Finite element mesh for the example B obtained through the AutoMesh 2D

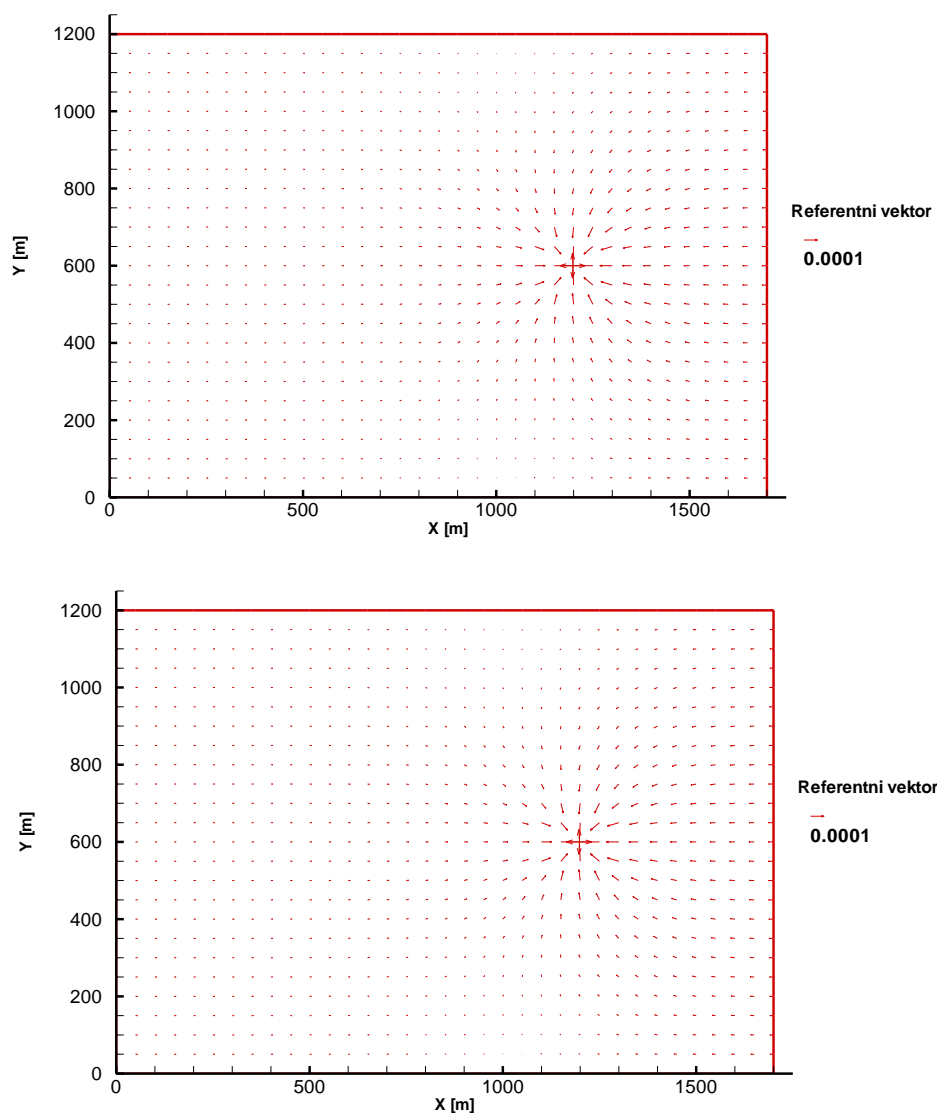
## 4 Rezultati i diskusija

Od rezultata analize, predstavljene su pijeziometarske kote kao i vektori brzina filtracije za dva izabrana vremenska trenutka. Za vizuelizaciju rezultata korišćen je sofver *Tecplot 10*. Predstavljene rezultati (slika 3 i 4) se odnose na vremenske trenutke na  $t_1 = 10000$  s i za  $t_2 = 1000000000$  s.



Slika 3. Sračunat raspored pijeziometarskih kota za primer B:  $t_1 = 10000$ s (gore) i  $t_2 = 10^9$ s (dole)

Figure 3. Computed head distribution for the example B:  $t_1 = 10000$ s (up) i  $t_2 = 10^9$ s (down)



Slika 4. Sračunat raspored vektora brzina za primer B:  $t_1 = 10000s$  (gore) i  $t_2 = 10^9s$  (dole)  
Figure 4. Computed velocity vector distribution for the example B:  $t_1 = 10000s$  (up) i  $t_2 = 10^9s$  (down)

Poređenjem predstavljenih rezultata za određene vremenske trenutke sa rezultatima iz literature ustanovljeno je da postoji izvesno odstupanje. Npr ukoliko se razmatra čvor koji odgovara poziciji crpnog bunara (čvor 18 na Slici 1.), za vremenski trenutak  $t_2$ , primenom programa *unsteady\_seepg* razvijenog u okviru istraživanja koja su pratila ovaj rad, dobijena je vrednost pijezometarske kote od 45.74 m. Kinzelbach [5] u svojoj knjizi za isti čvor i mrežu prikazanu na slici 16. dobija vrednost pijezometarske kote od 47.07 m. Autoru se razlika od preko 1.3 m se na prvi pogled činila kao greška. Međutim kada je isti primer analiziran primenom mreže konačnih elemenata od 204 konačna elementa, dobijena je vrednost pijezometarske kote od 46.30 m. U odnosu na mrežu sa četiri puta više elemenata to je razlika od preko 0.5 m. Na osnovu dobijenih rezultata ustanovljeno je da su odstupanja rezultata prouzrokovana znatno gušćim mrežama korišćenim u ispitivanjima iz ovog rada. Primenom gušćih mreža dobijene su

znatno bolje aproksimacije „tačnog“ rešenja. Predstavljena činjenica ukazuje na potrebu primene mreža konačnih elemenata velike gustine kad god je to moguće, budući da razlike od preko 1 m u pijezometarskim kotama sigurno mogu znatno uticati na interpretaciju dobijenih rezultata. Dodatno, nakon objašnjenja uzroka pojave odstupanja vrednosti rezultata u odnosu na rezultate iz literature, može se konstatovati da je razvijeni numerički model verifikovan.

## 5 Zaključak

Podzemne vode predstavljaju jedan od ključnih resursa za vodosnabdevanje. Matematičko modeliranje dinamike podzemnih voda je neophodno u cilju sprovođenja analiza kao što su npr bilansiranje raspoloživih količina ili transport zagađujućih materija. Neustaljeno strujanje vode u poroznoj sredini se matematički opisuje paraboličkom, parcijalnom, diferencijalnom jednačinom drugog reda. Budući da se do analitičkog rešenja u opštem slučaju dosta teško dolazi, neophodno je pribеći nekom od numeričkih metoda za dobijanje aproksimativnog rešenja. U ovom radu je predstavljeno numeričko rešenje spomenute jednačine u dve dimenzije, metodom konačnih elemenata. Predstavljen je način kako se od početne parcijalne diferencijalne j-ne, primenom Galjorkinove metode i parcijalne integracije, dolazi do rezidualnog oblika jednačine. U radu je opisano kako se dolazi do globalnih matrica provodnosti i kapacitivnosti kao i vektora sila. Konačno nakon što se dobijena matrična diferencijalna jednačina diskretizuje u vremenu konačnim rezultatima dobija se sistem linearnih jednačina koji se može rešavati eksplicitno ili implicitno. Prikazana metodologija je primenjena u razvijanju numeričkog modela u FORTRAN okruženju.

Dva primera iz literature su iskorišćena za verifikaciju razvijenog programa. Numerički model je korišćen zajedno sa softverom AutoMesh2D koji se koristi za generisanje mreža konačnih elemenata. Predstavljene su rezultati primene na predstavljanim primerima, gde je ustanovljeno da postoji izvesno odstupanje u odnosu na rezultate iz literature. Daljom analizom je pokazano da su odstupanja nastala zbog činjenice da je u analizama predstavljanim u ovom radu korišćena znatno gušća mreža konačnih elemenata. Samim tim predstavljene rezultati su samo bolja aproksimacija tačnog rešenja.

Plan je da se u bliskoj budućnosti iskoristi numerički model dalje u kooperaciji sa modelom konvektivno-difuzne transportna jednačine, koji je i dalje u fazi razvoja. Jedan od neophodnih ulaznih podataka za ovaj budući model će biti vrednosti vektora brzina filtracija u čvorovima mreže, budući da je njime definisan konvektivni član transporta.

## Literatura

1. Bathe, K.J., (1996), *Finite Element Procedures*, PRENTICE HALL, Upper Saddle River, New Jersey.
2. Durbin, T.J., (1978), *Calibration of a mathematical model of the Antelope Valley ground-water basin, California (Geological survey water-supply paper 2046)*, United States government printing office, Washington.
3. Jovanović, M., (2008), *Numeričke metode u hidrotehnici: Metoda konačnih elemenata – doktorski kurs*, Građevinski fakultet, Univerzitet u Beogradu.

4. Kapor, R., (2008), *Hidraulika*, Građevinski fakultet, Univerzitet u Beogradu.
5. Kinzelbach, W., (1986), *Groundwater modelling: an introduction with sample programs in BASIC*, Elsevier, Amsterdam.
6. Ma X.W., Zhao G.Q., Sun L., (2011), *AUTOMESH-2D/3D: robust automatic mesh generator for metal forming simulation*. Materials Research Innovations, 15(1), pp 482-486
7. McDermott, C., (2003), *Inside finite elements for outsiders*, Center for Applied Geology, Tübingen.
8. Hoffman, J., (1992), *Numerical method for engineers and scientists 2nd ed.* Marcel Dekker, Inc., New York.
9. Wang, H.F., Anderson, M.P., (1982), *Introduction to groundwater modeling*, ACADEMIC PRESS, INC., San Diego.
10. Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L., (2000a), *The Finite Element Method Volume 1: The Basis*, Butterworth-Heinemann, 225 Wildwood Avenue, Woburn.
11. Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L., (2000b), *The Finite Element Method Volume 3: Fluid Dynamics*, Butterworth-Heinemann, 225 Wildwood Avenue, Woburn.